

# Efectos de reducir el impuesto a la ganancia

(equilibrio parcial versus equilibrio general)

# EFFECTOS DE REDUCIR EL IMPUESTO A LA GANANCIA (EQUILIBRIO PARCIAL VERSUS EQUILIBRIO GENERAL)

Carlos Esteban Posada P.  
1 de agosto de 2018

Profesor del Departamento de Economía; Escuela de Economía y Finanzas, Universidad EAFIT, Colombia. Se agradecen los comentarios de Miguel Acosta, Jesús Botero, Alejandro Torres y otros asistentes a los seminarios de Coyuntura Económica y Economía de la Univesidad EAFIT.

## RESUMEN

En este documento se presenta un conjunto de estimaciones sobre los efectos de reducir la tarifa del impuesto a la ganancia de las empresas en el caso colombiano. La estimación realizada bajo un esquema de equilibrio parcial genera resultados diferentes y menos confiables que los de la estimación que se basa en un modelo de equilibrio general.

## ABSTRACT

*This document presents a set of estimates on the effects of reducing the rate of income tax on enterprises in the Colombian case. The estimate made under a partial equilibrium scheme generates different and less reliable results than those based on a general equilibrium model.*

## I. INTRODUCCIÓN

El análisis de los impactos de la reducción del impuesto a las ganancias de las empresas ha cogido nuevo vigor a raíz de la reforma tributaria aprobada en Estados Unidos en diciembre de 2017. En Colombia el candidato presidencial (ya elegido) Iván Duque anunció su interés en impulsar un proyecto de ley

## PALABRAS CLAVES

Tarifa de impuesto a la ganancia; inversión; ahorro; PIB por trabajador; tasa de interés; modelo macroeconómico.

## KEY WORDS

*Profits Tax Rate; Investment; Savings; Per Worker GDP; Interest Rate; Macroeconomic Model.*

## CÓDIGOS DEL SISTEMA DE CLASIFICACIÓN JEL

E13; E17; E22; E27; E62

## JEL CLASSIFICATION CODES

E13; E17; E22; E27; E62

En las secciones siguientes se presenta el fundamento del análisis y los resultados de cálculos realizados en el marco de dos esquemas teóricos: uno de equilibrio parcial, y otro de equilibrio general.

## II. LA TEORÍA DEL CAPITAL Y LA INVERSIÓN (EL MODELO DE LA “Q DE TOBIN”), Y UN CÁLCULO DE EQUILIBRIO PARCIAL

En lo que sigue supondremos la existencia de una empresa representativa, y consideraremos la maximización de su valor como el objetivo que se propone el representante de esta (vale decir, de sus dueños). Supondremos también que la función de producción tiene las propiedades convencionales (y, además, rendimiento de escala constantes), que la magnitud de la eventual deuda no afecta el valor de la empresa y que todos los impuestos que paga la empresa se resumen en uno solo: un impuesto a la ganancia contable<sup>1</sup>, y que los efectos de cambios de la tarifa del impuesto sobre las magnitudes de la inversión en capital y del capital no son instantáneos sino “lentos” en vista de que hay costos de ajustar el capital observado a su nivel óptimo (pero que no hay costos de ajustar el trabajo a su nivel óptimo).

En el Anexo se presenta la demostración de los determinantes del nivel óptimo del capital de la empresa representativa,  $K$ . En un período  $t$  cualquiera este nivel es el lado izquierdo de la siguiente ecuación:

$$K_t^* = A_0(1 + g_A)^t N_0(1 + g_N)^t \left[ \frac{\alpha}{\left(\frac{\delta + r}{1 - \tau}\right) q^* - \left(\frac{\varphi}{2}\right) \delta^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Siendo  $A$  y  $N$  los niveles de eficiencia media de la fuerza laboral utilizada por la empresa y la magnitud de esta, respectivamente (niveles que varían a través del tiempo), y siendo  $\alpha, \delta, r, \tau, \varphi$  la elasticidad del producto de la empresa al capital, la tasa de depreciación del capital, la tasa de interés real, la tarifa del impuesto a

la ganancia y el parámetro del costo de ajustar una unidad de capital efectivo a su nivel óptimo, en tanto que  $q^* = 1 + \varphi\delta(1 - \tau)$  es el nivel óptimo (de estado estable) de la “prima” que el costo de ajuste del capital existente a su nivel óptimo genera sobre el valor de la empresa por unidad de capital (es decir:  $q_t = V_t/K_t$ ; siendo  $V_t$  el valor de la empresa en el período  $t$ ).

Además, la inversión es:

$$I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$$

Así que si:  $K_{t+1} = K_t = \dots = K^*$ ,  
entonces:  $I_{t+1} = I_t = \dots = I^* = \delta K_t$

La teoría deduce un ajuste lento del capital a su nivel óptimo a fin de que los costos del ajuste no se alejen demasiado de lo “razonable”.

A fin de aplicar la teoría supondremos una cierta ley de evolución del capital por unidad de trabajo eficiente ( $AN$ ). Esta ley es la siguiente hipótesis:

Hipótesis A<sup>2</sup>:

$$\left(\frac{K}{AN}\right)_t = e^{-\lambda t} \left(\eta \frac{q^a}{q^*}\right) + (1 - e^{-\lambda t}) \left(\frac{K}{AN}\right)^* ; \eta > 0; 0 < \lambda < 1$$

Significa lo anterior que el capital por unidad de trabajo eficiente puede cambiar a través del tiempo, alejándose de un valor inicial arbitrario y aproximándose a su valor final u óptimo. Y este proceso, dada la evolución de la eficiencia laboral y de la fuerza de trabajo, determina la trayectoria de la inversión. El parámetro  $\eta$  es auxiliar para efectos de calibración, en tanto que el parámetro  $\lambda$  tiene un papel más importante: define la velocidad de convergencia del capital (por unidad de trabajo eficiente) a su nivel de estado estable.

De otra parte, de acuerdo con la teoría, el ajuste de la variable  $q$  a su nivel de estado estable es casi instantáneo. Esto lo podemos describir con la siguiente hipótesis.

Hipótesis B:

$$q_t = e^{-\gamma t} q^a + (1 - e^{-\gamma t}) q^*; \gamma > 1; t = 0, 1, \dots$$

<sup>1</sup> O, lo que es equivalente, omitiremos la discusión sobre efectos de cambios de las tarifas de impuestos a pagar por otros conceptos. La parte teórica sobre inversión y capital se basa en la llamada “teoría  $q$  de la inversión” (Ver, al respecto: Sargent (1987), Wickens (2011), y Romer (2012), entre otros. Para la relación entre inversión e impuestos ver también Hall y Jorgenson (1967)).

<sup>2</sup> En Romer (2012, pp. 425 y ss.) se encuentra una discusión que es compatible con esta hipótesis.

Siendo  $q^a$  un valor arbitrario (inicial); por ejemplo, el nivel previo de equilibrio o nivel anterior a uno o varios cambios permanentes en **parámetros** que inciden sobre los niveles de estado estable de  $K/AN$  y  $q$ . El parámetro  $\gamma$  define la velocidad de convergencia de  $q$  a su nivel de estado estable. Así que, según lo dicho previamente,  $\gamma$  es mucho mayor que  $\lambda$ .

### Un ejercicio numérico de equilibrio parcial

Un primer ejercicio consiste en calcular la elasticidad del capital a la tarifa del impuesto. Los cuadros 1 y 2 muestran los valores supuestos para los parámetros y los de estado estable del capital por unidad de trabajo eficiente y de  $q$ .

**CUADRO 1. PARÁMETROS DEL EJERCICIO DE EQUILIBRIO PARCIAL**

$\alpha$	0,4	$\gamma$	3
$\delta$	0,05	$\eta$	4,5
$\varphi$	1	$qa$	1,5
$\tau$	0,18	$g_A$	0,01
$r$	0,047	$g_N$	0,014
$\lambda$	0,6	$A_0$	1
		$N_0$	1000

( $\lambda=0,6$  implica que el ajuste del capital desde cualquier valor arbitrario inicial a su nivel de estado estable) es, aproximadamente, 8 años.

**CUADRO 2. VALORES DE ESTADO ESTABLE**

$\left(\frac{K}{AN}\right)^*$	7,247
$q^*$	1,041

De acuerdo con Ballesteros (2018, tabla 4), la tarifa media sobre la ganancia total de las empresas (formales) (no necesariamente la tarifa marginal) es 21% en Colombia. Esta tasa es casi igual a la estimada por Djankov et al. (2010) para la empresa típica formal de países de ingresos medios bajos: 20%.

Según Rincón y Delgado (2018, Cuadro 4), la tarifa media del impuesto de las sociedades sobre sus ingresos de capital en Colombia fue, en 2016, 31,1%. Según Melo et al. (2017), la tarifa efectiva pasó de 28,3% (2005) a 22% (2014).

Los resultados del ejercicio (Cuadro 3) son los cálculos de la elasticidad del capital a la tarifa del impuesto a la ganancia en el largo plazo bajo dos escenarios: el primero supone una reducción de la tarifa desde su nivel efectivo actual, 18%, a 9%, y el segundo supone una reducción desde un nivel hipotético igual a 9% a otro igual a 4,5% (a fin de comprobar que tal elasticidad tiende a reducirse en la medida en que la tarifa es más baja). La elasticidad de la inversión es igual, en el largo plazo, a la elasticidad del capital.

**CUADRO 3. RESULTADOS. ELASTICIDADES DEL CAPITAL A LA TARIFA DEL IMPUESTO EN EL LARGO PLAZO (32 AÑOS)**

Cambio de tarifa: de 18% a 9%	Cambio de tarifa: de 9% a 4,5%
-0,35	-0,16

### III. La estimación de las elasticidades utilizando un modelo macroeconómico: un ejercicio de equilibrio general

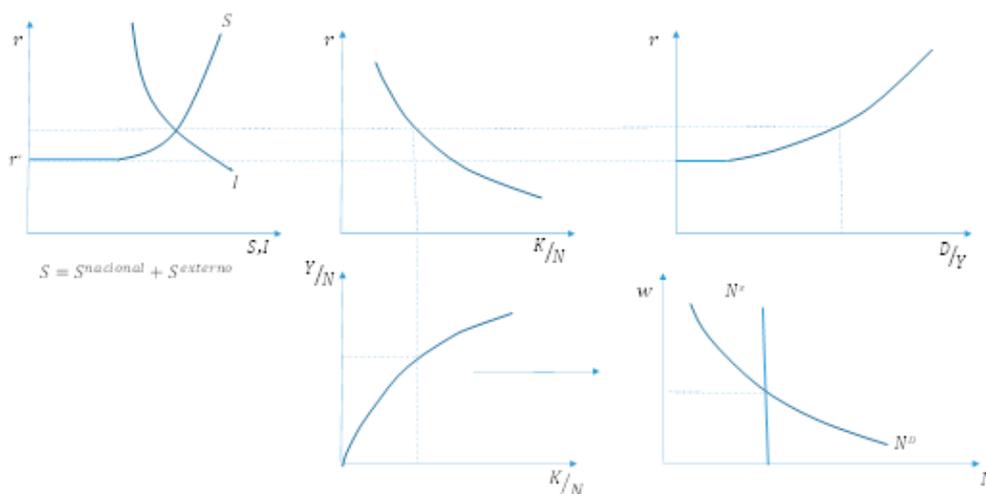
En esta sección se presenta una nueva estimación de la elasticidad de largo plazo del capital a la tarifa del impuesto a la ganancia. Tal estimación se hizo en el marco de un modelo macroeconómico cuyas principales características son la siguientes:

1. Oferta laboral exógena.
2. Salario real y tasa de interés real flexibles.
3. Tasa de ahorro doméstico = promedio ponderado de dos tasas de ahorro (la de una familia joven y la de una vieja) según las trayectorias de consumo generadas por un modelo microeconómico de optimización inter-temporal.

4. Crecimiento poblacional (total y de la fuerza laboral) y cambio técnico exógenos.
5. Una empresa representativa con funciones de producción e inversión según el modelo microeconómico de la sección anterior (el modelo de la "q" de Tobin).
6. Pequeña economía abierta que produce un bien transable, con tasa de cambio real constante (y exógena) y movilidad imperfecta de capitales, con tasa de interés real interna igual a la externa más un "spread" creciente con el grado de endeudamiento externo ( $D/Y$ ).
7. El ahorro total depende positivamente de la tasa de interés real por la dependencia (parcial) del ahorro externo y del ahorro doméstico respecto de esta variable.
8. El saldo de la balanza comercial se determina como un residuo: PIB – consumo hogares – gasto (consumo) del gobierno – inversión (privada).
9. El componente de la cuenta corriente externa distinto a la balanza comercial y al pago de intereses (es decir, la suma de remesas, dividendos, salarios, etc.) depende positivamente del PIB.
10. La inversión extranjera directa (IED) depende positivamente del PIB y negativamente de la tarifa del impuesto a la ganancia.
11. El endeudamiento externo depende negativamente (permaneciendo lo demás constante) de la IED.
12. Equilibrio presupuestal del sector público.

El gráfico 1 ilustra las características principales del modelo.

**Gráfico 1. El modelo macro**



El modelo microeconómico que otorga racionalidad al componente de ahorro y consumo privado del modelo macroeconómico parte de la maximización de la serie de los valores presentes de las utilidades periódicas de una familia que dependen de su consumo, c, sujeta a una restricción presupuestal en cada período. La familia empieza joven y establece una tra-

yectoria de consumo compatible con tal objetivo a lo largo de 32 años, dados unos niveles (exógenos) de patrimonio inicial y final. De la ejecución de este programa se desprende una trayectoria de las tasas de ahorro de cada año, así que se puede estimar la tasa de ahorro de la familia joven y de la vieja. Cabe aclarar que la restricción presupuestal en cada período debe

(y se logra), finalmente, ser compatible con la tasa de interés y con el ingreso nacional por trabajador, neto de impuestos, del modelo macroeconómico.

Lo anterior permite simular diferentes trayectorias de las tasas periódicas de ahorro ante diferentes tasas de interés y, entonces, hacer explícita la elasticidad promedio de la tasa media de ahorro a la tasa de interés.

El cuadro 4 presenta los parámetros del modelo microeconómico.

CUADRO 4. PRINCIPALES PARÁMETROS DEL MODELO MICROECONÓMICO DE CONSUMO Y AHORRO	
$r$	0,068: tasa de interés (real)
$\theta$	0,022: tasa subjetiva de descuento de las utilidades
$\sigma$	1: coeficiente de aversión relativa al riesgo: $\sigma = \frac{1-\sigma-1}{1-\sigma}$

El cuadro 5 presenta los parámetros del modelo macroeconómico. Cuando fue pertinente se mantuvieron los valores de los parámetros del ejercicio de equilibrio parcial. Esto fue posible gracias al supuesto de rendimientos de escala constantes de la función de producción.

CUADRO 5. PARÁMETROS DEL EJERCICIO DE EQUILIBRIO GENERAL (MODELO MACROECONÓMICO)			
$\alpha$	0,4	$\gamma$	3
$\delta$	0,05	$\eta$	4,5
$\varphi$	1	$qa$	1,5
$\tau$	0,18	$g_A$	0,01
$r^*$	0,047: "piso" de $r$	$g_N$	0,014
$\lambda$	0,6	$A_0$	1
$\mu$	1: elasticidad promedio de la tasa media de ahorro a la tasa de interés, dado un rango factible de variación de esta tasa	$N_0$	1000
REMO/Y	0,01	$\beta$	0,03
$x$	0,29: una tarifa de impuesto (al ingreso laboral y a las remesas, etc. (REMO) aparentemente demasiado alta en vista de que no se tuvo en cuenta el impuesto a las ventas de consumo.		

El modelo macroeconómico incorpora una tasa media de ahorro que es un promedio ponderado de las tasas de ahorro de familias jóvenes y viejas (la ponderación es la participación de cada tipo de familia en el total), y depende de la tasa de interés. Incluye además el componente no comercial de la cuenta corriente de la balanza de pagos (llamado REMO: remesas y otros), cuya participación en el PIB ( $Y$ ) se supone fija (0,01). La relación entre la inversión extranjera y el PIB depende de la tarifa del impuesto a la ganancia:  $\frac{I^E}{Y} = \beta \left( \frac{1}{1+\tau} \right)$ . El recaudo tributario total depende tanto de los impuestos a la ganancia y a los rendimientos financieros como de los impuestos al ingreso laboral y al componente no comercial de la cuenta corriente externa:  $Recaudo = \tau(\alpha Y + r f) + \chi[(1 - \alpha)Y + REMO]$ .  $Y$  se supone que siempre hay equilibrio entre el recaudo y el gasto público.

Al utilizar el modelo macro para simular los efectos de cambios de la tarifa del impuesto a la ganancia se pudo calcular la elasticidad del capital a dicha tarifa que, en el largo plazo es igual a la elasticidad de la inversión. El cuadro 6 presenta los resultados de tres simulaciones.

CUADRO 6. ELASTICIDADES CON RESPECTO A LA TARIFA DEL IMPUESTO (LARGO PLAZO: 32 AÑOS)				
TASA DE CAMBIO TÉCNICO: 1% ANUAL		TASA DE CAMBIO TÉCNICO: 1,15% ANUAL		
CAMBIO DE TARIFA: DE 18% A 9%		CAMBIO DE TARIFA: DE 9% A 4,5%		CAMBIO DE TARIFA: DE 18% A 9%
Capital	-0,21		-0,09	-0,29
PIB/Trajador	-0,08		-0,03	-0,17
Tasa de interés real	-0,24		-0,07	-0,26

La elasticidad reportada en la primera columna (-0,21 = 0,107/-0,5) implica que por cada punto de reducción de la tarifa (pasando esta de 18% a 9%, es decir, cayendo 9 puntos) se logra un aumento de un punto porcentual de aumento del capital (=0,107/9). Este incremento es pequeño si se compara con lo hallado por Ohn (2018) para el caso reciente de EEUU: "A 1 percentage point reduction in tax rates increases investment by 4.7 percent of installed capital, ..."<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Además, Nallareddy et al. (2018) encontraron evidencia (econométrica) de efectos significativos sobre la inversión de la reducción del impuesto a la ganancia de empresas en Estados Unidos. Djankov et al. (2010) también la encontraron para una muestra de 85 países (corte transversal para 2004).

Pero nuestro resultado es muy cercano al de Melo et al (2017). “...we calculate EMTRs (effective marginal tax rates) per firm, based on the specific features of the Colombian tax system. Results indicate that calculated for the corporate income tax vary between 22% in 2014 and 28.3% in 2005 that are lower than the statutory tax rates prevalent in those years, 38.5% and 33%, respectively, the difference can be explained by the tax benefits and deductions that the tax legislation has. When the wealth tax is considered in the analysis, EMTRs increase around 4.7% in 2008 and 2011, and 5.7% in 2014..... In the second step, we estimate the effect of EMTRs on investment using a panel data approach. To overcome the potential endogeneity problems, we use as instruments the changes in the marginal tax rates created by tax reforms. Results indicate that the corporate income tax elasticity of investment is -0.2...” (Melo et al., 2017, pp. 33-4)<sup>4</sup>.

Con todo, según Ballesteros (2018): “no se encuentra un impacto de los impuestos efectivos sobre la IED (inversión extranjera directa y la FBKF (formación bruta de capital fijo) a excepción de un efecto negativo de algunas medidas sobre la IED en países OCDE”.<sup>5</sup>

### Cambio técnico endógeno

Si suponemos que como resultado de la reducción del impuesto a la ganancia (marginal) aumentan los recursos de capital y trabajo utilizados en el sector de empresas relativamente grandes (formales) a costa de los utilizados por empresas pequeñas (lo que sería de esperarse según Djankov et al. 2010), empresas con escalas de producción demasiado bajas para ser eficientes pero que basan su “ventaja comparativa” en su mayor facilidad para evadir las normas estatales (empresas informales), se tendría un incremento de la productividad multifactorial del conjunto de la economía, suponiendo, además, que el traslado de recursos también contribuye a destinar una parte de ellos a la innovación.

Este sería un caso de cambio estructural y cambio técnico endógenos.

En consecuencia, tendríamos mayores crecimientos

del capital y del producto por trabajador en los próximos 32 años que en el caso de un cambio técnico a la tasa inicialmente supuesta: 1% anual.

## IV. CONCLUSIONES

Los ejercicios de equilibrio parcial son proclives a sobrestimar las elasticidades de la inversión ante la tarifa del impuesto a la ganancia si se los compara con las que podemos estimar con un modelo macroeconómico con cambio técnico inalterado. En todo caso, estas son modestas.

La reducción de la tarifa del impuesto a la ganancia de las empresas es un tipo de reforma tributaria que se justifica sobre todo si tuviese la capacidad de inducir un cambio estructural en favor de un sector formal de mayor productividad e innovación, es decir, capaz de generar un mayor cambio técnico. En otras palabras, si reinterpretemos el cambio técnico como algo parcialmente endógeno, asociado al cambio en la estructura productiva en favor de empresas formales, relativamente grandes e innovadoras, las elasticidades estimadas con un modelo macroeconómico serían sustancialmente mayores.

<sup>4</sup> Otras estimaciones de la tarifa y sus efectos para el caso colombiano se encuentran en Gómez y Steiner (2015) y Hamann et al. (2013).

<sup>5</sup> La estimación de Ballesteros (2018) es del tipo “Panel” con 73 países, tanto desarrollados como en desarrollo, a lo largo del periodo 1995-2014.

## REFERENCIAS

1. Ballesteros, Sebastián (2018). *EL IMPACTO DE LAS TASAS DE IMPUESTOS CORPORATIVOS EFECTIVOS SOBRE LA INVERSIÓN*. Trabajo de grado, Maestría en Economía, Universidad EAFIT.
2. Djankov, Simeon; Tim Ganser; Caralee McLiesh; Rita Ramalho; Andrei Shleifer (2010). THE EFFECT OF CORPORATE TAXES ON INVESTMENT AND ENTREPRENEURSHIP. *American Economic Journal: Macroeconomics* 2 (July).
3. Gómez, Hernando José, y Roberto Steiner (2015). LA REFORMA TRIBUTARIA Y SU IMPACTO SOBRE LA TASA EFECTIVA DE TRIBUTACIÓN DE LAS FIRMAS EN COLOMBIA. *Coyuntura Económica: Investigación Económica y Social*, XLV (1), Fedesarrollo, 13-44.
4. Hall, Robert, y Dale Jorgenson (1967). TAX POLICY AND INVESTMENT BEHAVIOUR. *American Economic Review*, 57 (3). 391-414.
5. Hamann, Franz., Lozano, Ignacio, y Luis Fernando Mejía (2013). SOBRE EL IMPACTO MACROECONÓMICO DE LOS BENEFICIOS TRIBUTARIOS AL CAPITAL. En L. E. Arango y F. Hamann (eds.), *El mercado de trabajo en Colombia: hechos, tendencias e instituciones*, Banco de la República, 253-284.
6. Melo, Ligia Melo, Javier Ávila, Jorge Enrique Ramos (2017). THE EFFECT OF CORPORATE TAXES ON INVESTMENT: EVIDENCE FROM THE COLOMBIAN FIRMS *Borradores de Economía* (B. de la R.) No. 1001.
7. Nallareddy, Suresh; Ethan Rouen; Juan Carlos Suárez Serrato (2018). CORPORATE TAX CUTS INCREASE INCOME INEQUALITY. NATIONAL BUREAU OF ECONOMIC RESEARCH Working Paper 24598 <http://www.nber.org/papers/w24598>.
8. Ohrn, Eric (2018). THE EFFECT OF CORPORATE TAXATION ON INVESTMENT AND FINANCIAL POLICY: EVIDENCE FROM THE DPAD. *American Economic Journal: Economic Policy* 2018, 10(2): 272-301. <https://doi.org/10.1257/pol.20150378>.
9. Rincón, Hernán, y Martha Helena Delgado (2018). ¿CUÁNTO TRIBUTAN EFECTIVAMENTE EL CONSUMO, EL TRABAJO Y EL CAPITAL EN COLOMBIA? *Borradores de Economía* (B. de la R.) No. 1041.
10. Romer, David (2012). *ADVANCED MACROECONOMICS* (Fourth Edition). McGraw-Hill
11. Sargent, Thomas (1987). *MACROECONOMIC THEORY* (Second Edition). Academic Press.
12. Wickens, Michael (2011). *MACROECONOMIC THEORY* (Second Edition). Princeton University Press.

## ANEXO. LA TEORÍA DEL CAPITAL ÓPTIMO Y DE LA INVERSIÓN

El valor de la empresa (en el período 0, e invocando el teorema Modigliani-Miller [Sargent, 1987, pp. 157-62; Wickens, 2011, pp. 79-80]) es:

$$V = \sum_{s=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+r} \right)^{s+1} \left\{ \left[ Y(K_s, A_s N_s) - w_s N_s - \delta K_s - \frac{\varphi}{2} \left( \frac{I_s^2}{K_s} \right) \right] (1-\tau) - (K_{s+1} - K_s) \right\}$$

Siendo:

$$I_s = K_{s+1} - (1 - \delta)K_s$$

$r$  es la tasa de interés real, en tanto que  $\frac{\varphi}{2} \left( \frac{I_s^2}{K_s} \right)$  es la erogación irrecuperable o costo de cambiar el nivel del capital (subirlo o bajarlo) por unidad de inversión, es decir que cuando se realiza en el período  $s$  una inversión de magnitud  $I_s$  la erogación total es:

$$\left( 1 + \frac{\varphi}{2} \frac{I_s}{K_s} \right) I_s = I_s + \frac{\varphi}{2} \frac{I_s^2}{K_s}$$

El problema equivale a maximizar el siguiente lagrangeano:

$$\begin{aligned} \Lambda = & \sum_{s=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+r} \right)^{s+1} \left\{ \left[ Y_s(K_s, A_s N_s) - w_s N_s - \delta K_s - \frac{\varphi}{2} \left( \frac{I_s^2}{K_s} \right) \right] (1-\tau) - (K_{s+1} - K_s) \right. \\ & \left. - q_s [K_{s+1} - (1-\delta)K_s - I_s] \right\} = \\ & \sum_{s=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+r} \right)^{s+1} \left\{ \left[ Y_s(K_s, A_s N_s) - w_s N_s - \delta K_s - \frac{\varphi}{2} \left( \frac{I_s^2}{K_s} \right) \right] (1-\tau) - (I_s - \delta K_s) \right. \\ & \left. - q_s [K_{s+1} - (1-\delta)K_s - I_s] \right\} \end{aligned}$$

Teniendo como variables de control  $N_s, I_s$  para  $s \geq 0$ , y  $K_s$  para  $s > 0$

Nótese que el multiplicador de Lagrange para cada período  $q_s$ , puede entenderse como el aporte marginal al valor de la empresa asociado al aflojamiento marginal de la restricción de capital, y por eso se denomina el "precio sombra del capital".

Condiciones de primer orden

Con respecto a  $N_s$

$$(1) \quad \frac{\partial Y_s}{\partial N_s} - w_s = 0$$

Con respecto a  $I_s$

$$(2) \quad -1 - \varphi \frac{I_s}{K_s} (1 - \tau) + q_s = 0$$

Con respecto a  $K_s$ :

$$(3) \quad -q_s + \frac{1}{1+r} \left[ \frac{\partial Y_{s+1}}{\partial K_{s+1}} + \frac{\varphi}{2} \left( \frac{I_{s+1}}{K_{s+1}} \right)^2 \right] (1 - \tau) + q_{s+1} (1 - \delta) = 0$$

La condición 2 implica que:

$$\frac{I_s}{K_s} = \frac{q_s - 1}{\varphi(1 - \tau)}$$

Para:

$$K_s = K_{s+1} = \dots = K^*$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{I_s}{K_s} = \delta \quad \therefore \quad \delta &= \frac{q_s - 1}{\varphi(1 - \tau)} \Rightarrow q_s = q_{s+1} = \dots \\ &= q^* = 1 + \varphi\delta(1 - \tau) \end{aligned}$$

Y la condición 3, para  $K_s = K_{s+1} = \dots = K^*$ ;  $q_s = q_{s+1} = \dots = q^*$ , implica que:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{(\delta + r)}{1 - \tau} q^* - \frac{\varphi}{2} \delta^2$$

Supongamos ahora que:

$$Y = K^\alpha (AN)^{1-\alpha}$$

Entonces, de lo anterior se deduce que:

$$\begin{aligned} \left( \frac{K}{AN} \right)^* &= \left[ \frac{\alpha}{\left( \frac{\delta + r}{1 - \tau} \right) q^* - \frac{\varphi}{2} \delta^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ \Rightarrow K_t^* &= A_t N_t \left[ \frac{\alpha}{\left( \frac{\delta + r}{1 - \tau} \right) q^* - \frac{\varphi}{2} \delta^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$



## **Escuela de Economía y Finanzas**

Centro de Investigaciones Económicas y Financieras

Grupo de estudios en Economía y Empresa

Línea de Macroeconomía Aplicada

Carrera 49 N° 7 Sur-50, Medellín - Colombia

Teléfono: (057-4) 261 9500 Ext 9532 - 2619532 | [cief@eafit.edu.co](mailto:cief@eafit.edu.co)